

2023年度 学校推薦型選抜(公募推薦入試) 【数学】 試験問題

【1】 次の問いに答えよ.

(1) $a = \frac{1}{\sqrt{10}-3}$ のとき, $a^3 - \frac{1}{a^3}$ の値を求めよ.

(2) 頂点が点 $(-1, 3)$ である放物線 C が x 軸と 2 点 A, B で交わり, 線分 AB の長さが $2\sqrt{3}$ である. このとき, C を表す 2 次関数の式を $y = ax^2 + bx + c$ の形で求めよ.

(3) 大小 2 個のサイコロを同時に 1 回投げ, 出た目の和を X , 積を Y とする. $X \geq 9$ となったときの Y が 3 の倍数である条件付き確率を求めよ.

(4) 直線 $y = 2x - 5$ が円 $x^2 + y^2 = 9$ によって切り取られる線分の長さを求めよ.

(5) 関数 $f(x) = (\log_2 x)^2 - \log_{\sqrt{2}} x^2 + 3$ の最小値と, そのときの x の値を求めよ.

(6) $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n - 2n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

【2】 $\triangle ABC$ において、 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさをそれぞれ A , B , C とし、
辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a , b , c とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ の外接円の面積が 4π のとき、 a を A の式で表せ。

(2) $A = \frac{\pi}{3}$, $b = c = 2\sqrt{3}$ のとき、 $\triangle ABC$ の重心 G を通る直線 l が辺 AB ,
 AC と交わっている。点 B から直線 l に垂線を引いてその交点を H と
し、 $\angle AGH = \theta$ とする。このとき、線分 BH の長さを $\sin \theta$ と $\cos \theta$
の式で表せ。

(3) $a^2 \tan B = b^2 \tan A$ が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

【3】 O を原点とする座標空間内に 2 点 $A(1, 3, 0)$, $B(0, 1, 3)$ をとるとき、次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$ の値を求めよ。

(2) $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ を満たす点 C について、 $\triangle OAC$ の面積を求めよ。

(3) 点 $P(7, 0, 0)$ から 3 点 O, A, B を含む平面に垂線を引き、その交点を Q とする。このとき、点 Q の座標を求めよ。

【4】 関数 $f(x) = x \cos x$ について、次の問いに答えよ.

- (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.
- (2) 座標平面上で、 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x \geq 0$ の部分で囲まれた図形のうち、 y 軸に最も近い図形の面積を求めよ.
- (3) a を正の定数とする. すべての実数 x に対して、等式

$$\int_a^x f(t) dt = x \sin x - \sin(x+a) + a$$

が成り立つような定数 a の値のうち、最小のものを求めよ.