

「数 学」

試験時間 100 分

配点 150 点

【過去問題に関する追記】

「答え」のみ記入する解答と、「途中式・考え方」を記入する解答がある。

【1】 以下の(1), (2)の各問いで, 空欄にあてはまる数を答えよ.

- (1) 3人がジャンケンをして, 負けた人から抜けていき, 1人が勝ち残るまで続けるものとする.

最初にジャンケンを1回するとき, 3人の手の出し方は全部で 通りあるから, この1回目でジャンケンが終わる確率は, 誰が勝つか, どの手で勝つかを考えることにより である. また, 1回目で誰も抜けない確率は である.

2回目でジャンケンが終わるのは

- (A) 1回目で1人が抜け, 2回目で1人が勝つ場合
(B) 1回目には誰も抜けず, 2回目で1人が勝つ場合

がある.

(A)が起こる確率は , (B)が起こる確率は であり, (A), (B)のことがらは互いに排反であるから, 2回目でジャンケンが終わる確率は + で求められる.

- (2) ① 数列 $\{a_n\} : \frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{4 \cdot 6}, \dots$

の第 n 項は $a_n = \text{カ} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + \text{キ}} \right)$

と表されるから, 初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \text{ク} - \frac{2n + \text{ケ}}{2(n+1)(n+2)}$$

である.

- ② $a_1 = 1, a_{n+1} = -2a_n + 9$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

で定められる数列 $\{a_n\}$ について

$$a_{n+1} - \text{コ} = -2(a_n - \text{コ})$$

が成り立つから、 $\{a_n\}$ の第 n 項は

$$a_n = (\boxed{\text{サ}})^n + \boxed{\text{シ}}$$

であり、初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \boxed{\text{ス}} (\boxed{\text{サ}})^n + \boxed{\text{セ}} n - \boxed{\text{ソ}}$$

である。

【2】 四面体 $OABC$ の各辺の長さが $AB=CA=OB=OC=3$, $OA=BC=4$ であるとき, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, として, 以下の各問いに答えよ.

- (1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ.
- (2) $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB との交点を D とするとき, \overrightarrow{OD} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.
- (3) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ.
- (4) 頂点 O から平面 ABC に垂線を引き, 平面 ABC との交点を H とするとき, \overrightarrow{OH} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ.
- (5) 四面体 $OABC$ に外接する球の半径 R を求めよ.

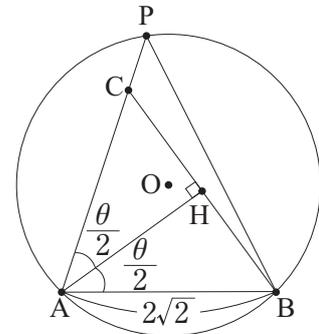
【3】 次の各問いに答えよ.

(1) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ の値を求めよ.

(2) $\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ.

(3) $\tan \frac{\theta}{2} = \alpha$ とおくととき, $\sin \theta$ を α を用いて表せ.

(4) 点 O を中心とする半径 2 の円において, 長さが $2\sqrt{2}$ の弦 AB と, 大きい方の \widehat{AB} 上に点 P がある. ただし, $\angle PAB$ が鋭角の範囲で点 P は動く.



① $\angle PAB$ の二等分線に点 B から垂線を引き, その二等分線との交点を H とし, 直線 BH と線分 PA との交点を C とする. $\angle PAB = \theta$ と

して, $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$ のとき, 線分 PC の長さを求めよ.

② $PA + PB$ の最大値を求めよ. 答えに二重根号が含まれる場合は, 外さずにそのままよい.

【4】 以下の各問いに答えよ.

(1) 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + x$ 上の x 座標が 2 の点における接線の方程式を求めよ.

(2) 定積分 $I = \int_0^3 |x^2 - x| dx$ を求めよ.

(3) 関数 $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ のグラフの概形を描け. ただし, 関数が極値をとる点や変曲点が存在する場合は, それらの点を黒丸にし, 座標をグラフに書き込むこと.

(4) n を 0 以上の整数として, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする. ただし, 以下では $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に対して $\sin^0 x = 1$ が成り立つことを用いても良い.

① $n \geq 2$ のとき, I_n を I_{n-2} の式で表せ. さらに, $nI_n I_{n-1}$ を求めよ.

② $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $0 \leq \sin x \leq 1$ であることに着目して, $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n^2$ を求めよ.