2025年度

「数　学」

試験時間　100 分

配点　　　150 点

【過去問題に関する追記】
「答え」のみ記入する解答と、「途中式・考え方」を記入する解答がある。

【1】 以下の各問いで，空欄にあてはまる数を答えよ．

(1) a が等式 $a^2-3=3a-4$ を満たすとき

$$a+\frac{1}{a}=\boxed{\text{ア}}$$

であり $$a^3+\frac{1}{a^3}=\boxed{\text{イ}}$$

である．

(2) 不等式 $$\frac{1}{2}x+1>\frac{2}{3}x-\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots(\text{i})$$

$$|x-5|\leqq k \quad (k \text{ は正の定数}) \quad \cdots\cdots(\text{ii})$$

について考える．

(i)の解は $x<\boxed{\text{ウ}}$

であり，(i)，(ii)をともに満たす整数 x がちょうど 6 個あるような k の値の範囲は

$$\boxed{\text{エ}}\leqq k<\boxed{\text{オ}}$$

である．

(3) あるメーカーでは，主力商品の値上げを検討している．この商品の現在の売値は 4800 円で，1 か月の平均販売個数は 3000 個である．過去のデータから，x 円値上げすると販売個数が 1 か月あたり平均販売個数より $\frac{1}{2}x$ 個減少することが予想される．この予想のもとで，x 円値上げした後の 1 か月の売上金額を y 円とすると

$$y=\boxed{\text{カ}}x^2+\boxed{\text{キ}}x+14400000$$

と表され，y が最大となる x の値は

$$x=\boxed{\text{ク}}$$

である．

(4) 座標平面上の原点 O を出発して，x 軸の正方向，または y 軸の正方向のいずれかに毎秒 1 ずつ進んでいく点 P がある．出発時およびその後 1 秒ごとに，x 軸の正方向か，y 軸の正方向にそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で進路をとる．

点 P が出発して 5 秒後に点 (3, 2) にある場合を考えると，原点 O から点 (3, 2) までの異なる経路は全部で $\boxed{\text{ケ}}$ 通りある．したがって，点 P が点 (3, 2) を通る確率は $\boxed{\text{コ}}$ である．

また，点 P が点 (2, 2) を通らずに点 (4, 4) を通るような確率は $\boxed{\text{サ}}$ である．

【2】 原点を O とする座標空間内の 3 点 A(1, −1, 0), B(0, 2, 1), C(0, 0, 3) について, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ.

(2) 線分 BC を 1 : 3 に内分する点を D とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表し, その大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ を求めよ.

(3) 実数 m, n が

$$m \geqq 0,\quad n \geqq 0,\quad m+n \leqq \frac{1}{2}$$

を満たすとき, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=m\vec{b}+n\vec{c}$ で定められる点 P の存在する領域の面積を求めよ.

(4) 3 点 A, B, C を通る平面を α とし, 原点 O から平面 α へ引いた垂線と α との交点を H とするとき

① 点 H の座標を求めよ.

② 直線 OH 上を動く点 P と, 直線 AC 上を動く点 Q があるとき, 2 点 P, Q 間の最短距離を求めよ.

【3】 以下の各問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx$ を求めよ.

(2) $\begin{cases} x=3\cos\theta+\cos 3\theta \\ y=3\sin\theta-\sin 3\theta \end{cases}$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

で表される点 $(x,\ y)$ が描く曲線の長さを求めよ.

(3) 関数 $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ の最大値・最小値およびそのときの x の値を求めよ.

(4) 曲線 $y=(\log x)^2-1$ と x 軸で囲まれた図形を D とするとき

① 図形 D の面積を求めよ.

② 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

【4】 以下の各問いに答えよ.

(1) 実数でない複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$, $0<\theta<2\pi$, $\theta\neq\pi$) について, $z-\dfrac{1}{z^2}$ が実数であるとき

① $\cos\theta$ を r を用いて表せ.

② $|z|=1$ のとき, $z^5+z^4+z^3+z^2+z$ の値を求めよ.

(2) 複素数 z が等式 $2|z+1|=|z-2|$ を満たすとき, z が複素数平面上でどのような図形を描くか述べよ.

(3) n を 2 以上の自然数として, 複素数 z を

$$z=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$$

とするとき

① $1+\sum_{k=1}^{n-1}z^k$ の虚部を $\cos\dfrac{\pi}{n}$ と $\sin\dfrac{\pi}{n}$ の式で表せ. ただし, 解答欄には$\sum$記号や「…」は用いないこと.

② 数列 $\{a_n\}$ の一般項を

$$a_n=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

で定めるとき, 極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.